Didaktický test 9

1 **Vypočtěte podíl součtu čísel 38 a 285 a jejich největšího společného dělitele (v uvedeném pořadí).**

$38 = 2 \cdot 19$
$285 = 3 \cdot 95 = 3 \cdot 5 \cdot 19$

$D(38; 285) = 19$

$$\frac{38+285}{19} = \frac{2 \cdot 19 + 15 \cdot 19}{19} = \frac{19 \cdot (2+15)}{19} = \mathbf{17}$$

2 **Vypočtěte:** /Operace s čísly, s. 12/ **max. 2 body**

2.1 $\sqrt{9 \cdot 11 + (-1)^2} - \sqrt{200^2 - 25\,600} = \sqrt{100} - \sqrt{40\,000 - 25\,600} = 10 - \sqrt{14\,400} = 10 - 120 = \mathbf{-110}$

2.2 $[(2-0{,}38):1{,}8]^2 = (1{,}62:1{,}8)^2 = \left(\frac{162}{180}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 81}{2 \cdot 90}\right)^2 = \left(\frac{9 \cdot 9}{9 \cdot 10}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}9^2 = \mathbf{0{,}81}$

3 **Vypočtěte a výsledek zapište zlomkem v základním tvaru.** /Operace s čísly, s.

3.1 $$\frac{\dfrac{-3\frac{1}{2} + 0{,}9 + \left(-1\frac{2}{5}\right)}{(-7)\cdot(-3)}}{\dfrac{9}{14} - 1} = \frac{\dfrac{-3{,}5+0{,}9-1{,}4}{21}}{\dfrac{9-14}{14}} = \frac{-4{,}9+0{,}9}{21} \cdot \frac{14}{-5} = \frac{-4}{21} \cdot \frac{14}{-5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{8}{15}}$$

3.2 $$\left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{3}{7} \cdot \sqrt{2{,}25} - 0{,}6\right) = \left(\frac{0{,}1}{1} + \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{3 \cdot 1{,}5}{7} - \frac{6}{10}\right) = \frac{0{,}5+2}{5} : \left(\frac{4{,}5}{7} - \frac{3}{5}\right) =$$
$$= \frac{2{,}5}{5} : \frac{22{,}5-21}{35} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{1{,}5} = \mathbf{\frac{35}{3}}$$

4 **Zjednodušte:** /Operace s algebraickými výrazy, s. 16/ **max. 4 bo**
(Výsledný výraz nesmí obsahovat závorky ani zlomky.)

4.1 $$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{3}{2}\right) = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} - \left(a^2 - \frac{9}{4}\right) = a^2 - a + \frac{1}{4} - a^2 + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} - a =$$
$$= 2{,}5 - a = \mathbf{-a + 2{,}5}$$

4.2 $m - [1 - (1-m)^2 - m] = m - [1 - (1 - 2m + m^2) - m] = m - [1 - 1 + 2m - m^2 - m] = m - m + m^2 = \mathbf{m^2}$

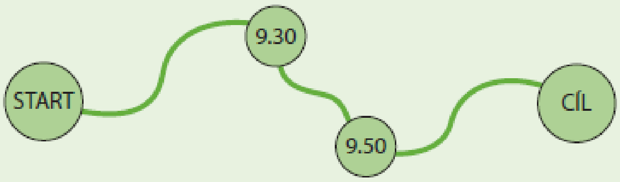
5 **Řešte rovnici:** /Lineární rovnice, s. 19/ **max.**

5.1 $$2 - \frac{1-3m}{6} = \frac{m-1}{3} - \frac{m-1}{8} \qquad | \cdot 24$$
$$48 - 4 + 12m = 8m - 8 - 3m + 3$$
$$44 + 12m = 5m - 5 \qquad | -5m - 44$$
$$7m = -49 \qquad | :7$$
$$\mathbf{m = -7}$$

5.2 $$n \cdot n + \frac{1}{3} = 0{,}6 \cdot n^2 + \frac{2}{5} \cdot n \cdot \left(n - 1\frac{2}{3}\right)$$
$$n^2 + \frac{1}{3} = 0{,}6n^2 + 0{,}4n^2 - \frac{2}{5} \cdot n \cdot \frac{5}{3}$$
$$n^2 + \frac{1}{3} = n^2 - \frac{2}{3}n \qquad | -n^2$$
$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}n \qquad | \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2} = n$$
$$\mathbf{n = -0{,}5}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Sportovec běžel tréninkovou trasu stále stejnou rychlostí.
V 9.30 měl za sebou $\frac{2}{5}$ celé tréninkové trasy a v 9.50 už $\frac{2}{3}$ celé tréninkové trasy.



6 /Sl

Od 9.30 do 9.50 uběhl $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}$ z celé tréninkové trasy.

6.1 Vypočtěte, za kolik minut sportovec uběhl celou trasu od startu do cíle.

$\frac{4}{15}$ celé tréninkové trasy uběhl za .... 20 minut
1 celou tréninkovou trasu uběhne za .... x minut

$$\frac{x}{20} = \frac{1}{\frac{4}{15}}$$

$$x = 20 \cdot \frac{15}{4}\ \text{min} = 5 \cdot 15\ \text{min}$$

$$x = 75\ \text{min}$$

Celou trasu uběhl za **75 minut**.

6.2 Vypočtěte, v kolik hodin sportovec vyběhl ze startu.

Celou trasu uběhne za .... 75 minut
$\frac{2}{5}$ trasy uběhl za .... x minut

$$\frac{x}{75} = \frac{\frac{2}{5}}{1}$$

$$x = \frac{2}{5} \cdot 75\ \text{min} = 2 \cdot 15\ \text{min}$$

$$x = 30\ \text{min}$$

První část trasy uběhl za 30 minut, tedy vyběhl ze startu **v 9.00**.

6.3 Vypočtěte v metrech délku celé tréninkové trasy, jestliže běžel rychlostí 8 km/h.

$v = 8\ \text{km/h}$

$t = 75\ \text{min} = \frac{75}{60}\ \text{h} = 1\frac{1}{4}\ \text{h}$

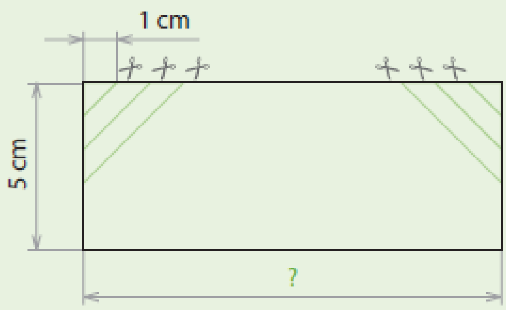
$s = v \cdot t$

$s = 8 \cdot 1\frac{1}{4}\ \text{km} = 8 \cdot \frac{5}{4}\ \text{km} = 2 \cdot 5\ \text{km} = 10\ \text{km} = 10\,000\ \text{m}$

Délka celé trasy je **10 000 m**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Z 5 cm široké papírové pásky ve tvaru obdélníku odstřihneme nejprve oba horní rožky tvaru rovnoramenného trojúhelníku s délkou ramene 1 cm. Postupně na obou stranách odstřihujeme po 1 cm proužek papíru tak dlouho, až se z původního obdélníku stane rovnoramenný lichoběžník, jehož jedna základna je o 10 cm delší než druhá základna. Obsah výsledného lichoběžníku bude 40 cm^2.



7 /Rovinné útvary, s. 49/ **max. 3 body**

7.1 Vypočtěte v cm, jaká musí být nejkratší délka pásky, ze které lze popsaným způsobem získat výsledný lichoběžník.

$S = 40\ \text{cm}^2$
$v = 5\ \text{cm}$

Obsah lichoběžníku vypočteme podle vzorce $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$. Dosadíme do tohoto vzorce známé veličiny a vypočteme $(a+c)$:

$40 = \frac{(a+c)\cdot 5}{2}$
$80 = (a+c)\cdot 5$
$16 = a + c$

Dále víme, že jedna základna je o 10 cm delší než druhá, tj. $a = c + 10$.

$a = c + 10$
$a + c = 16$

$(c+10) + c = 16$
$2c + 10 = 16$
$2c = 6$
$c = 3$
$a = 3 + 10 = 13$

Kratší základna lichoběžníku má délku **3 cm**.

7.2 Vypočtěte v cm délku pásky, potřebujeme-li k získání výsledného lichoběžníku s danými vlastnostmi odstřihnout právě 22 částí.

Po odstřižení 10 částí (po pěti z každé strany) se teprve začne odkrajovat po 1 cm z každé strany delší strana obdélníku. Zbývá tedy odstřihnout ještě 22 − 10 = 12 částí, tj. 12 cm z delší strany obdélníku. Protože zůstane 13 cm, je delší strana obdélníku rovna 13 + 12 = **25 cm**.

8 Doplňte do rámečku čísla tak, aby platila rovnost:

8.1 $\frac{3}{4}\ \text{h} - 0{,}5\ \text{h} + \boxed{12}\ \text{min} = 1\,620\ \text{s}$

$1\,620\ \text{s} = \frac{1620}{60}\ \text{min} = 27\ \text{min}$

$\frac{3}{4}\ \text{h} - 0{,}5\ \text{h} = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right)\text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}$

$(27 - 15)\ \text{min} = \mathbf{12\ min}$

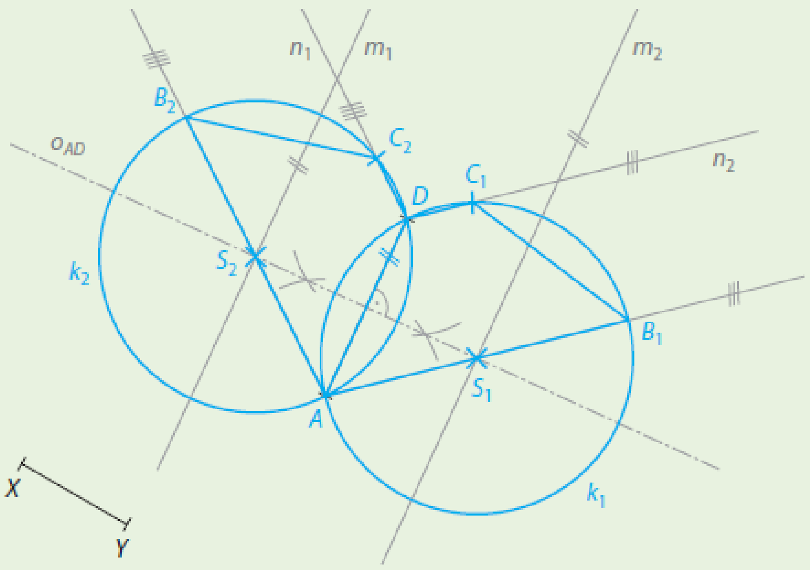
8.2 $(7{,}3\ \text{dm}^2 + 48\ \text{cm}^2)\cdot \boxed{5\,000} = 389\ \text{m}^2$

$7{,}3\ \text{dm}^2 + 48\ \text{cm}^2 = (0{,}073 + 0{,}004\,8)\ \text{m}^2 = 0{,}077\,8\ \text{m}^2$

$389 : 0{,}077\,8 = 3\,890\,000 : 778 = \mathbf{5\,000}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

V rovině leží úsečka AD.



9.1 Zápis konstrukce:

1. o_{AD}, osa úsečky AD
2. $m_1, m_2; m_1, m_2 \parallel AD$, vzdálenost od AD je $|XY|$
3. $S; S \in m \cap o_{AD}$
4. $k; k(S; r = |SA|)$

9.2 Zápis konstrukce:

1. $B; B \cap AS \cap k$
2. $n; n \parallel AS, D \in n$
3. $C; C \in n \cap k, C \neq D$
4. lichoběžník $ABCD$

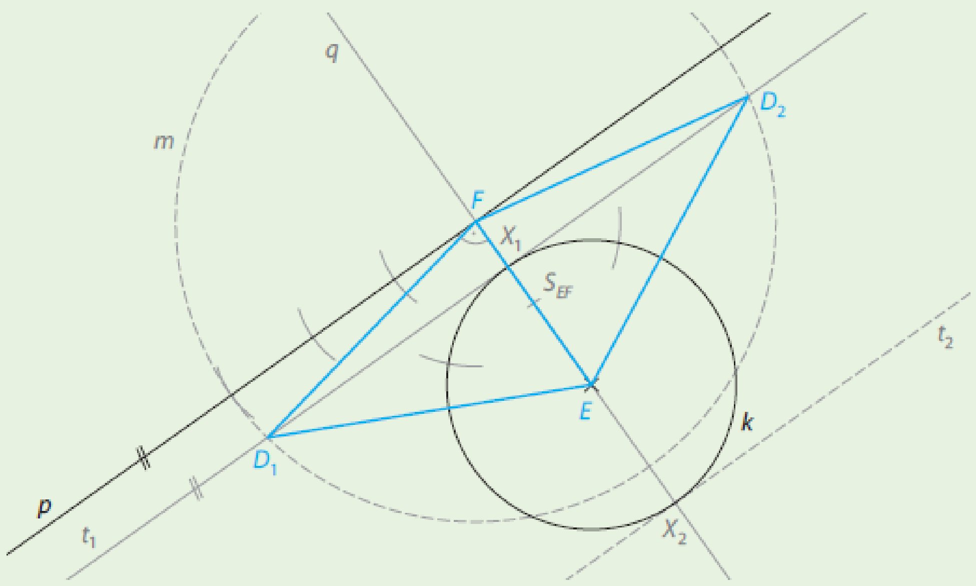
9 **Úsečka AD je tětivou kružnice k se středem S opsané lichoběžníku $ABCD$. Tětiva AD je od středu S vzdálená o délku úsečky XY. Strana AB lichoběžníku $ABCD$ prochází bodem S.** /Konstrukční úlohy, s. 36/ **max. 3 body**

9.1 Sestrojte střed S kružnice k a kružnici k narýsujte. Zobrazte všechna řešení.

9.2 Sestrojte chybějící vrcholy B, C lichoběžníku $ABCD$ a lichoběžník narýsujte. Zobrazte všechna řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině leží přímka p a kružnice k se středem E.



Zápis konstrukce:

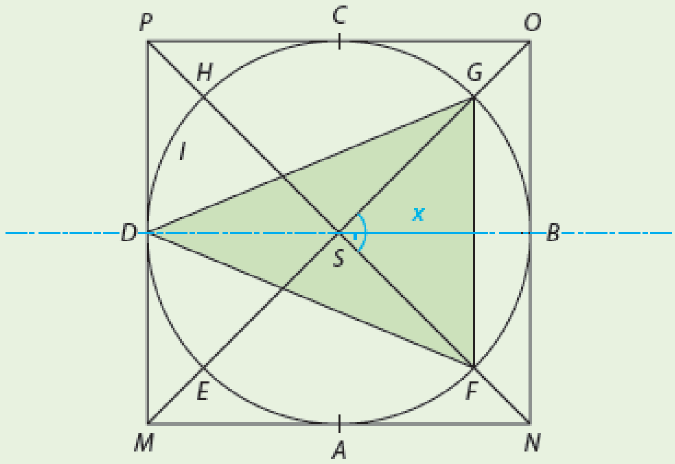
1. $q; q \perp p, E \in p$
2. $F; F \in p \cap q$
3. $X; X \in q \cap k$
4. $t; t \parallel p, X \in t$
5. S_{EF}, střed úsečky EF
6. $m; m(F; r = 3 \cdot |ES_{EF}|)$
7. $D; D \in t \cap m$
8. $\triangle DEF$

10 Bod E je vrcholem trojúhelníku DEF. Vrchol F leží na přímce p. Strana EF je kolmá na přímku p. Vrchol D leží na tečně t ke kružnici k, která je rovnoběžná s přímkou p. Platí: $|FD| = 1{,}5 \cdot |EF|$ /Konstrukční úlohy, s. 36/ **max. 3 body**

Sestrojte chybějící vrcholy D, F trojúhelníku DEF a trojúhelník narýsujte. Zobrazte všechna řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Čtverci *MNOP* je vepsána kružnice *l* se středem *S* a poloměrem 10 cm. Body dotyku kružnice *l* se čtvercem *MNOP* jsou body *A*, *B*, *C*, *D*. Průsečíky kružnice *l* s úhlopříčkami čtverce *MNOP* jsou body *E*, *F*, *G*, *H*.



/Rovinné útvary, s. 49/ **max. 4 body**

11 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (11.1–11.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
11.1	Trojúhelník *DFG* je rovnoramenný.	☒	☐
11.2	Výška na stranu *FG* trojúhelníku *DFG* má délku větší než 15 cm.	☒	☐
11.3	Úsečka *FG* má délku právě $10 \cdot \sqrt{2}$ cm.	☒	☐

11.1 Přímka *DB* je jedinou osou souměrnosti trojúhelníku *DFG*, trojúhelník *DFG* je rovnoramenný.

11.2 + 11.3

Výška na stranu *FG* trojúhelníku *DFG* má dvě části. Jedna část je úsečka $|DS| = 10$ cm. Druhou část označme *x*. Úsečka *FG* je přeponou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku *FSG*, její délku vypočteme z Pythagorovy věty:

$$|FG|^2 = 10^2 + 10^2$$

$$|FG| = \sqrt{200}\ \text{cm} = \sqrt{100 \cdot 2}\ \text{cm}$$

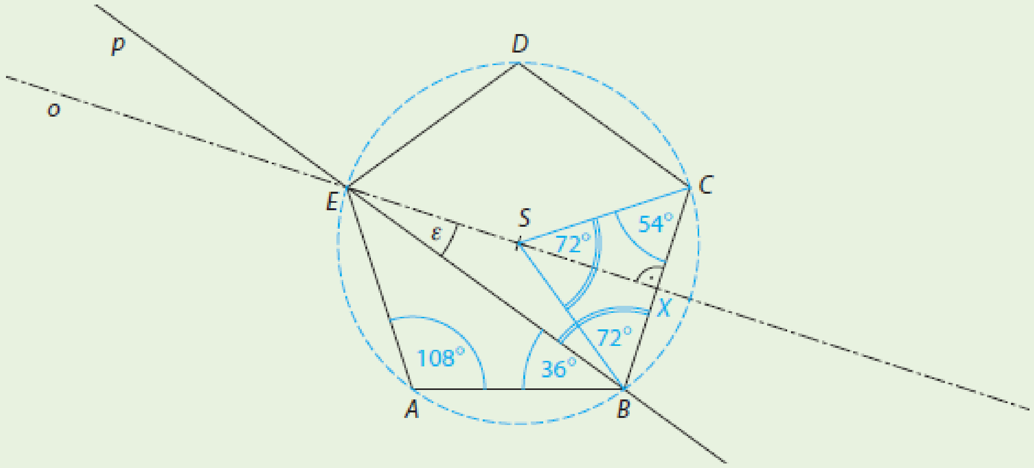
$$|FG| = 10 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}$$

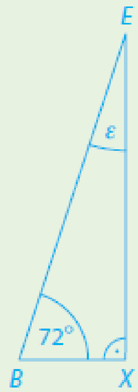
Délka *x* se rovná polovině úsečky *FG*. Protože pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník *FSG* se skládá ze dvou rovnoramenných trojúhelníků (s úhly 45°, 45° a 90°), délka úsečky *x* je $5 \cdot \sqrt{2}$ cm.

$$10 + 5 \cdot \sqrt{2} > 15$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

V rovině leží pravidelný pětiúhelník *ABCDE*, přímky *p* a *o*.
Přímka *o* je osou souměrnosti pravidelného pětiúhelníku *ABCDE* a přímka *p* prochází vrcholy *B*, *E*.





12 **Jaká je velikost úhlu ε?** /Úhly, s. 46/ **2 body**
(Velikost úhlu neměřte, ale vypočtěte.)

A) menší než 12°
B) 12°
C) 18°
D) 36°
E) větší než 36°

$|\sphericalangle BSC| = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

$|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$

$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$

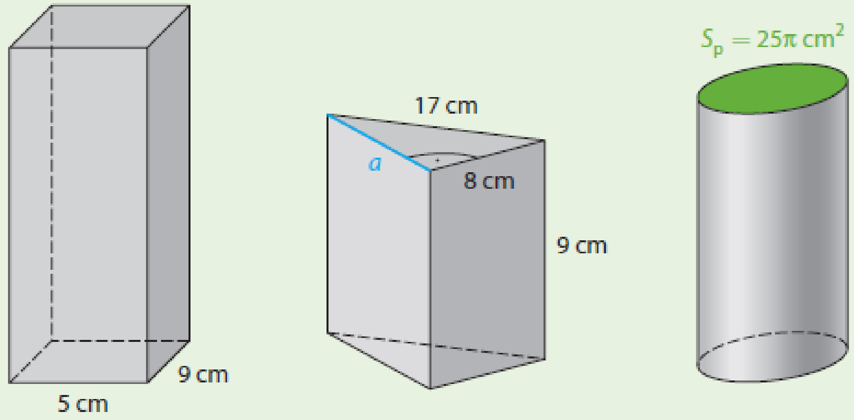
$|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle EBA| = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$

$|\sphericalangle EBC| = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$

$\varepsilon = 90^\circ - 72^\circ = \mathbf{18^\circ}$

Správná odpověď je **C.**

Poměr objemů kvádru a trojbokého hranolu je 4 : 3. Výška válce je o 25 % menší než výška kvádru.



13 **Jaký je objem válce?** /Tělesa, s. 53/ **2 body**

A) $100\pi\ cm^3$ B) $150\pi\ cm^3$ C) $200\pi\ cm^3$ D) $300\pi\ cm^3$ E) jiný počet cm^3

Dopočítáme délku podstavné hrany hranolu podle Pythagorovy věty:

$a^2 = 17^2 - 8^2$

$a^2 = 289 - 64$

$a = \sqrt{225}\ cm = 15\ cm$

Vypočteme objem hranolu:

$$V_H = S_p \cdot v = \frac{a \cdot b}{2} \cdot v = \frac{15 \cdot 8}{2} \cdot 9\ cm^3 = 540\ cm^3$$

Objem kvádru:

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot V_H = \frac{4}{3} \cdot 540\ cm^3 = 720\ cm^3$$

Odtud vypočteme výšku kvádru:

$$v = \frac{V_K}{S_p} = \frac{720}{5 \cdot 9}\ cm = \frac{80}{5}\ cm = 16\ cm$$

Výška válce je o 25 %, tj. o čtvrtinu menší než výška kvádru. Výška válce je tedy 12 cm.

Objem válce je:

$$V_V = S_p \cdot v = 25\pi \cdot 12\ cm^3 = 300\pi\ cm^3$$

Správná odpověď je **D**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Sklenice se zavařeninou uzavřená víčkem má hmotnost 1,2 kg.
Hmotnost víčka odpovídá $\frac{1}{4}$ hmotnosti prázdné sklenice.
Zavařenina má o 700 gramů vyšší hmotnost, než je hmotnost víčka a prázdné sklenice dohromady.

14 **Která z následujících rovnic <u>neodpovídá</u> zadání úlohy, jestliže neznámá *x* představuje hmotnost prázdné sklenice?** /Slovní úlohy, s. 21/ **2 body**

A) $2x+\frac{1}{4}x+0{,}7=1{,}2$

B) $2\cdot\left(x+\frac{1}{4}x\right)+0{,}7=1{,}2$

C) $2x+\frac{1}{2}x+0{,}7=1{,}2$

D) $2\cdot\left(x+\frac{1}{4}x\right)=0{,}5$

E) $x+\frac{1}{4}x+\left(x+\frac{1}{4}x\right)=0{,}5$

x .... hmotnost prázdné sklenice

$\frac{x}{4}$ .... hmotnost víčka

$x+\frac{x}{4}$ .... hmotnost prázdné sklenice s víčkem

$x+\frac{x}{4}+0{,}7$ .... hmotnost samotné zavařeniny

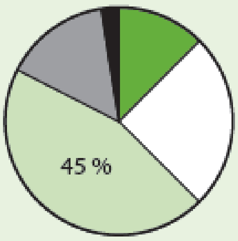
$$\left(x+\frac{x}{4}\right)+\left(x+\frac{x}{4}+0{,}7\right)=1{,}2$$

$$2\cdot\left(x+\frac{x}{4}\right)+0{,}7=1{,}2$$

Pouze možnost A) neodpovídá zadání.

Správná odpověď je **A.**

Graf ukazuje pololetní hodnocení 480 žáků školy z matematiky.
Poměr počtu žáků, kteří měli z matematiky čtyřku, dvojku nebo trojku, je 3 : 5 : 9 (v uvedeném pořadí).
Jedniček bylo pětkrát více než pětek.



- počet jedniček
- počet dvojek
- počet trojek
- počet čtyřek
- počet pětek

/Procenta, s. 26; Práce s daty v grafu, s. 32/ **max. 6 bodů**

15 **Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledek (A–F).**

15.1 Kolik % žáků školy mělo z matematiky dvojku? E

15.2 Kolik % žáků školy mělo z matematiky jedničku? B

15.3 Kolik % žáků školy mělo z matematiky čtyřku nebo pětku? D

A) méně než 12,5 %
B) 12,5 %
C) 15 %
D) 17,5 %
E) 25 %
F) více než 25 %

15.1 9 dílků (trojky) .... 45 %
5 dílků (dvojky) ...... x %

$$\frac{x}{45}=\frac{5}{9}$$
$$x=\frac{5\cdot 45}{9}\ \%$$
$$x=25\ \%$$

Správná odpověď je **E.**

15.2 5 dílků (dvojky) .... 25 %
1 dílek .... 5 %
3 dílky (čtyřky) .... $3\cdot 5\ \%=15\ \%$

Dvojky, trojky nebo čtyřky mělo $(45+25+15)\ \%=85\ \%$ žáků.
Jedničky nebo pětky mělo dohromady $(100-85)\ \%=15\ \%$ žáků.

Počet pětek .... y %
Počet jedniček .... $5y$ %

$$y+5y=15$$
$$6y=15 \quad |:6$$
$$y=\frac{15}{6}\ \%$$
$$y=2{,}5\ \%$$

Jedničky tvoří $(15-2{,}5)\ \%=12{,}5\ \%$.

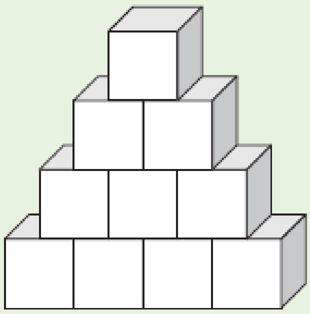
Správná odpověď je **B.**

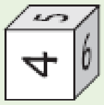
15.3 $15\ \%+2{,}5\ \%=17{,}5\ \%$

Správná odpověď je **D.**

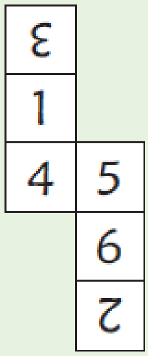
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOZE 16

Pavel má v sáčku určitý počet hracích kostek. Postupně je vytahuje a pokládá vedle sebe do řady, všechny kostky v řadě nejprve číslem 1 dolů. Na 20 kostek v první řadě staví druhou řadu z 19 kostek číslem 2 dolů, třetí řada má vespod číslo 3 a tak pokračuje dál. Po čísle 6 znovu začíná pokládat kostky číslem 1 dolů. V každé další řadě je vždy o jednu kostku méně. Pavel pokračuje stejným způsobem dále, až postaví pyramidu, kde nahoře bude jediná kostka, a sáček zůstane prázdný.


Pyramida z 10 kostek



Hrací kostka



Síť hrací kostky

16 /Nestandardní úlohy, s. 58/ **max. 4 body**

16.1 Určete, kolik kostek bylo v sáčku původně.

$20 + 19 + 18 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{(20+1) \cdot 20}{10} = \mathbf{210}$

16.2 Vypočtěte součet čísel na horních stěnách všech kostek v páté řadě.

Na horních stěnách kostek v páté řadě jsou dvojky.
Počet kostek v páté řadě je 16.
Součet čísel na horních stěnách všech kostek v páté řadě je $16 \cdot 2 = \mathbf{32}$.

16.3 Určete, jaké číslo bude na horní stěně poslední kostky na vrcholu pyramidy.

Na spodní stěně poslední kostky (na vrcholu pyramidy) je dvojka, na její horní stěně je tedy číslo **5**.